Ein neutrales Element ist eines, das mit allen übrigen Elementen verknüpft werden kann, ohne sich „einzumischen", wie die Null bei der Addition von Zahlen oder die Eins bei der Multiplikation.

Unser neutrales Element ist dasjenige, das eine Anfangszuordnung nicht verändert, das also einfach einen Zustand belässt, wie er ist. Unser Transformationsbegriff deckt dieses Element nicht ab, denn er verlangte, dass die beiden Werte am Anfang und am Ende der Transformation ungleich waren. Unsere 3. Anforderung lautet deshalb wie folgt:

3. Anforderung

Neutrales Element

F 10 **Neutrales Element $X^1 := X^1(e|w) = e|w$**

Dieses Element ist übrigens immer wiederholbar. Außerdem hat es eine interessante Doppelnatur. Obwohl es keine Transformation in unserem Sinne ist, weil es Werte nicht ändert, kann es als „Symmetrietransformation" in dem Sinne betrachtet werden, dass es eben den Zustand der Eigenschaft nicht berührt. Andererseits ist es gerade dadurch selbst ein Zustand, nichts weiter als eine Zuordnung von Wert zu Eigenschaft.

Mit einem solchen neutralen Element lässt sich dann auch das inverse Element erklären als die Transformation X^{-1}, die eine vorhergehende X wieder aufhebt.

Inverses Element

F 11 **Inverses Element $X^{-1} := X^{-1}(e|w') = e|w$**
für $X(e|w) = e|w'$

4. und letzte Anforderung

Da $X(e|w) = e|w'$ bereits existieren soll, ist die Beziehung zwischen w und w' ebenfalls gegeben. Nichts unserer bisherigen Anforderungen deckt jedoch ab, dass dies auch einer gültigen Transformation entspricht, soll heißen, dass diese Wertveränderung von w' zu w auch möglich ist. Unsere letzte Anforderung lautet deshalb, dass wir die Existenz dieser Transformation schlicht verlangen. Können wir unser inverses Element also nicht bequem ableiten, fordern wir einfach, dass es da ist und zwar für jede Transformation, die wir in unsere Menge aufgenommen haben. Diese Inverse ist übrigens genau die „normale" Transformation, die die inverse Translation $x^{-1}(w') = w$ erzeugen würde.

Ist die Ausgangstransformation X wiederholbar, so lässt sich auch zeigen, dass die Inverse wiederholbar sein muss. Der Zusammenhang ist für die Inversen erst recht gegeben, wenn die Ausgangstransformationen zusammenhängend sind.

3.2.4 Definition der Information: Längenbestimmung

Das sind bisher bereits einige Einschränkungen für unsere Menge von Transformationen einer Eigenschaft e: Erstens sollen es nur wiederholbare Transformationen sein, dann sollen sie alle zusammenhängen, dann soll zu jeder Transformation eine existieren, die sie genau aufhebt und zum Schluss noch eine, die gar nichts tut.

Dann haben wir tatsächlich eine Gruppe. Die Wiederholbarkeit sichert uns nämlich praktischerweise die Assoziativität, also die Reihenfolgenunabhängigkeit – genau dies war unsere „Geschichtslosigkeit" der Transformation.

eine Gruppe

Und genau diese Gruppe nennen wir Information bezüglich der Eigenschaft, auf die sich all unsere derartig eingeschränkten Transformationen beziehen.

Die Formel für die Information

F 12 **Information $I_e := \{X, X^1, X^{-1}$ |
X wiederholbare, zusammenhängende Transformationen einer Eigenschaft e,
bei Existenz von X^1 als Einselement und X^{-1} der Inversen von X für alle X)**

Kontinuierlich ist diese Gruppe freilich nicht und sollte es besser vielleicht gar nicht sein. Warum?

Weil Kontinuierlichkeit das Zerfließen von Unterscheidbarkeiten der Mengenelemente bedeutet und gerade diese Unterscheidbarkeit uns für die Abbildbarkeit der Information so bedeutsam ist. Andererseits sind auch kontinuierliche Mengen mathematische Mengen, sichern damit die Eindeutigkeit jeden Elementes und sollten deshalb wenigstens eine Unschärferelation an Differenz aufweisen – belassen wir es also dabei, solange die Elemente identifizierbar bleiben.

Unsere Information ist nun richtig rund.

Durch die geforderte Identifizierbarkeit der Eigenschaft und ihrer Werte ist die Abbildbarkeit der Information gesichert, durch die Transformation weiterhin die aus allen Informationsverarbeitungen bekannte Tatsache, dass Abbildungen aus den Ereignissen der Umwelt heraus erzeugt und verändert werden können.

Durch die Gruppeneigenschaft andererseits haben wir den Bezug zur Mathematik geschaffen, denn die Translationsabbildung auf der Wertemenge, auf der die Transformationen wiederholbar sind, ist eine reguläre, zuverlässige mathematische Funktion mit all den Vorteilen, die diese über Jahrhunderte Physik und Technik bot. Da die Transformationen zusammenhängend sind, formt auch die Wertemenge mit der Translationsabbildung eine Gruppe, denn Transformation und Translation sind geradezu äquivalent unter diesen Bedingungen.

Die Wiederholbarkeit selbst ist die Grundvoraussetzung für das Experiment, das die Physik aus allen anderen Erkenntnisbestrebungen des menschlichen Geistes hervorhebt: Es erlaubt die beständige Überprüfung der Behauptungen und seien sie noch so gewaltig.

Literaturverweis 49

Spektrum der Wissenschaft, 3/1999, „Was vor dem Urknall geschah“, Martin A. Bucher/ David N. Spergel, S. 61

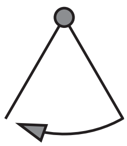
> „Wie läßt sich die erweiterte Inflationstheorie testen? Daß sie das Konzept der Inflation im offenen Universum verbindet, reicht zur Rechtfertigung nicht aus. Die Kosmologen brauchen quantitative Vorhersagen, die sich durch astronomische Beobachtungen überprüfen lassen…
> Der Augenblick der Wahrheit könnte Ende nächsten Jahres kommen, wenn die… NASA ihren Satelliten MAP… in die Umlaufbahn schicken wird. Von 2007 an will die… ESA mit ihrem Satelliten namens Planck noch höhere Meßgenauigkeit erreichen… Damit sollte sich entscheiden lassen, welches Modell nun stimmt: entweder das mit einer kosmologischen Konstante oder das mit offener Inflation. Vielleicht paßt auch keines von beiden. Dann würden die Theoretiker buchstäblich von vorne beginnen – mit neuen Ideen für den Beginn des Universums.“

Die Kraft der Physik, selbst das Undenkbare wie Geburt und Tod des Universums denken zu können, beruht tatsächlich auf diesem einen Grundsatz: Alles über den Haufen zu werfen und sei es noch so „glaubhaft“, wenn es durch das Experiment nicht gestützt wird. Haben wir diesen Grundsatz nicht eigentlich bei jedem Lernen sogar der einfachsten Informationsverarbeitungen gefunden? Widersprüche im Abbildungsmodell als Versagen des Modells zu sehen mit der Auflage, dies zu verbessern oder gar zu ersetzen, ist nicht nur hehre physikalische Tradition oder ein mathematisches Konzept. Selbst das einfachste Leben folgt dieser Strategie, auch wenn der Regenwurm es wohl nicht auf einer so abstrakten Ebene, sondern eher auf einer sehr direkten erlebt: Ist sein Körper, gestaltet nach dem genetischen Modell, nicht erfolgreich genug, stößt das Modell also auf „Widersprüche“ zur Realität, muss er wohl meist sterben.

Wiederholbarkeit + Zusammenhang = speicherbare Veränderung

Wiederholbarkeit und Zusammenhang sind die Grundlage des Erfolgs von Lernen, denn sie ermöglichen es, dass zwar Veränderung erfolgt, diese aber über ihre Werte und deren Muster greifbar werden und speicherbar. Somit sind sie auch mit späteren Ereignissen vergleichbar, um deren Veränderungen dagegen zu halten und ihren weiteren Verlauf einschätzen zu können.

Der Zusammenhang erlaubt uns darüber hinaus noch eine weitere Beziehung zwischen unseren Transformationen und den Werten, die durch sie erreicht werden. Das Noethersche Theorem bewies Erhaltungsgrößen für kontinuierliche Symmetrietransformationen. Eine einfache anschauliche Metapher unserer Transformation als Pendel, bei dem die Eigenschaft der feste Punkt ist und die Ausschläge zu beiden Seiten als Anfangs- und Endwerte interpretiert werden, führt nun zu einem Dreieck als Bild für die Transformation. Eine infinitesimale



Transformation, wie sie das Theorem behandelt, wäre dann ein Dreieck von sehr kleiner Fläche, praktisch eine Linie. Dass in dem Fall tatsächlich eine Erhaltungsgröße vorliegt, verführt dazu, die Länge der beiden Dreiecksseiten zwischen Eigenschaft und Werten als das graphische Gegenstück zur Erhaltungsgröße zu sehen. Bei einem schmalen Dreieck berühren sich seine Seiten nämlich fast und müssen deshalb annähernd gleich sein. Natürlich ist dies nur eine Assoziation von mehr oder minder hoher Tauglichkeit, doch sie bewegt uns dazu, den Zusammenhang zwischen den Transformationen noch weiter auszunützen: Wir können damit eine Länge bestimmen.

Für die Länge zwischen zwei Werten betrachten wir die Anzahl der Transformationen, die nötig sind, um mit einem der beiden Werte als Anfangszuordnung über diese Transformationsketten dann den anderen Wert als Endzuordnung zu erhalten. Welcher Wert der Anfangs- und welcher Wert der Endwert ist, soll uns dabei nicht interessieren.

Der einfachste Fall liegt wohl vor, wenn eine Transformation existiert, die die beiden Werte direkt verbindet, dieser Fall soll deshalb die Länge 1 erhalten. Müssen andere Transformationen dazwischengeschaltet werden, soll die Anzahl dieser Transformationen gezählt werden. Da hier viele verschiedene Kombinationen möglich sein können, werden wir als Länge die geringste Anzahl von Transformationen fordern, die zwischen zwei solchen Werten liegen.

F 13 **Länge $L_e(e|w,e|w')$ = Länge $L_e(w,w')$** Länge
:= 0 für $w = w'$
:= 1 für $X(e|w) = e|w'$ oder $X(e|w') = e|w$
:= min(n) für $\{X \mid nX(e|w'') = e|w''',$
X zusammenhängend zwischen w, w' oder w',w$\}$

Obwohl die Transformationskette aus Anfangs- und Endzuordnungen also sehr wohl nur eine einzige Richtung aufweisen könnte, ist die Länge in beide Richtungen bestimmt.

Sie erfüllt auch tatsächlich die mathematischen Anforderungen an Abstände, denn diese sind wie alles Fundamentale in der Mathematik von einfacher Natur: Ein Abstand ist eine Funktion zwischen je zwei Elementen einer Menge, die immer größer als Null sein muss außer dann, wenn beide Elemente gleich sind, die symmetrisch, also unabhängig von der Anordnung der Elemente sein soll und die darüber hinaus die Dreiecksungleichung erfüllt. Letzteres heißt, dass bei „Zwischenschaltung" eines weiteren Elements als Umweg dieser Umweg nie kleiner werden darf als der direkte Weg zwischen beiden Elementen. Da wir als Länge die generell kürzeste Transformationskette zwischen zwei Elementen gewählt haben, kann ein Umweg über eine dritte Zuordnung beziehungsweise einen dritten Wert nicht noch kürzer werden. Die übliche Forderung, dass ein Abstand für alle Elementpaare definiert sein muss, erfüllt dann zuletzt unser Zusammenhang.

Wozu wissen, was Information ist?

Sie fragen, wozu das gut sein soll? Und warum wir die Information so umständlich definiert haben, wenn wir doch nichts weiter damit erreichten, als dass wir mathematische Funktionen damit erzielen konnten – die wir aber schon längst haben? Wozu es gut sein soll, dass wir jetzt genau wissen, was Information ist und dass dieses Wissen nichts weiter tut als wunderbar zu dem zu passen, was wir von Information und Informationsverarbeitung dachten und was die Wissenschaft und Technik uns berichtet hat? Dass sie die Shannon-Formel der Gehaltsmessung durch eine Menge mit einer Anzahl von Elementen erklärt, die bei Unkenntnis der Elementeigenschaften die erzeugten Zustände über die Gleichwahrscheinlichkeit beschreiben muss? Und dass in unwahrscheinlichen Zuständen die meiste Information einfach deshalb steckt, weil zyklische Verhaltensweisen Ordnung schaffen und dies tatsächlich umkehrbar ist in den Fällen häufiger Geschehnisse – dass also aus Ordnung immer folgert, dass keine Zufallsereignisse mitgewirkt haben, was bei der Konstruktion von Informationsverarbeitungen bedeutsam wird? Weil die „Bertrand-Wahrscheinlichkeit des Auftretens" hier so hoch wird, dass sie fast schon Sicherheit ist?

Ihr Einwand besteht zu Recht.

Dass die Informationsdefinition zu allen bisherigen Erkenntnissen passen musste, war unausweichlich, wenn sie vernünftig sein sollte – die bisherigen Erkenntnisse waren schließlich nicht falsch. Genau genommen ist die Übereinstimmung zwischen unserer Definition und der funktionalen Mathematik so hoch, dass sich wirklich die Frage erhebt, wozu wir uns eigentlich der Mühe unterzogen. Was wir erreichten, war zu begründen, warum Physik und Mathematik so erfolgreich sind, doch das waren sie ganz sicher auch ohne unsere Argumente.

Information ist das gesamte regelmäßige Verhalten einer speziellen Eigenschaft.

Sie denken, wir haben überhaupt nichts gewonnen mit unserem neuen Wissen, dass Information das gesamte regelmäßige Verhalten einer speziellen Eigenschaft ist?

Doch. Haben wir.

Wertewechsel

Denn durch was erreichten wir die Übereinstimmung unserer Wertveränderungen mit dem mathematischen Funktionenbegriff? Wir haben im Verlauf unseres Bestrebens, die Gruppe für die Information zu formulieren, schließlich einen „Wertewechsel" durchgeführt. Zu Anfang unserer Betrachtungen gingen wir immer ganz allgemein von Transformationen aus, die wir ohne jede Einschränkung nur mit einer einzigen Bedingung versahen: Eine oder mehrere betrachtete Transformationen sollten einfach nur existieren, nichts sonst.

Im Verlauf der weiteren Strukturierung fingen wir jedoch an, Eigenschaften zu fordern. Die Transformation sollte wiederholbar sein, mehrere sollten zusammenhängend sein, dann sollte es noch Transformationen geben, die andere wieder auflösten. Dann – erst dann, wenn all diese Einschränkungen zusammenfielen, formten diese Wertveränderungen einzelner Eigenschaften die sauber strukturierte Menge an Information, deren Wertveränderungen für sich betrachtet zuverlässige Funktionen auf der Menge der Werte bildeten.

Das ist vom theoretischen Standpunkt aus eine sehr legitime Vorgehensweise: das Problem erst einmal abzustecken, sich über die Möglichkeiten und Variationen Gedanken zu machen und dann zu bestimmen, was bedeutsam ist und was nicht. Genau das machten wir, als wir theoretisch die Information in den Griff bekommen wollten. Das half uns, nicht nur die Information klar bestimmen zu können, sondern auch Forderungen aufzustellen wie Wiederholbarkeit und Zusammenhang und sogar erste Strukturmessungen in die Wege zu leiten mit der Längenbestimmung.

Und genau dies macht den Unterschied. Denn bei der Information war längst nicht mehr nicht das Problem die mathematische Formulierung, das Problem bei der Information lag und liegt in ihrer Entdeckung.

Das mathematische Konzept der feststehenden Mengen, auf denen unveränderliche Strukturen mehr oder minder diffiziler Ausprägung vorhanden sind, ist nämlich für normale Informationsverarbeitungen erst nach einer langen Zeit des Lernens gegeben, wenn viele Details gesammelt und viele Zusammenhänge aufgedeckt wurden. In dem Falle konnten diese denn auch die fixe Abbildung und die Konfigurationsmethode verwenden, erinnern Sie sich?

feststehenden Mengen

erst nach langer Zeit des Lernens

Konfigurationsmethode

Unsere Menge an Wertveränderungen, die bestimmte Anforderungen erfüllen, zeigt uns nun nicht nur, warum dieses mathematische Konzept der Menge so erfolgreich ist, es zeigt uns weiter sogar die „Zwischenstufen“ auf.

Denn eine Menge ist ein wunderbares logisches Konstrukt. Doch unsere Suche begann bei beobachterabhängigen Wirklichkeiten, Höhlenmalereien und allgemeinen Betrachtungen über Abbildungen und weist nicht zuletzt dadurch auf, wie breit gefächert Information ist und wohl sein muss, wenn sie das ganze Leben bedingen sollte. Und sie zeigte deutlich, dass dieses Leben sich der Vielfalt immer sehr offen stellte.

Was ist nun der Gewinn unserer Definition?

Umgekehrt: Was haben wir gefordert, um diese Definition zu erstellen? Eigenschaften und Werte als Mengenelemente, weil sie eindeutig, stabil, unterscheidbar und damit dauerhaft identifizierbar sind. Solche Mengenelemente können aber unterschiedlichster Natur sein. Es kann eine Haarfarbe sein, die blond, braun und rot als Farbenwerte hat, es kann aber auch eine Stadt sein, deren Werte die jeweilige Bevölkerung ist, es kann ein Universum in seinen diversen Entwicklungsstadien sein. Unterscheidbarkeit und Eindeutigkeit sind Anforderungen, die nur wenig Einschränkung bedeuten, Stabilität ist sogar eine, die gar keine Schmälerung ist, so wie wir sie sehen. Denn was sich ändern kann, sind nur die Relationen zwischen ihnen, das Universum als Idee bleibt ewig, ob seine reale Existenz nun den Wert „jung“ oder „alt“ aufweist.

Das nächste, was wir forderten, war die Veränderung dieser Relationen und dass dies wiederholbar zu sein hatte, dass also die Haarfarbe nicht nach Lust und Laune geändert werden dürfte, wenn es Information sein sollte, sondern nur nach einem bestimmten Schema. Das Letzte, was wir dann von informativen Wertveränderungen wollten, war, dass sie zusammenhängen müssten, dass also zwischen den möglichen Werten dieser Eigenschaft ein Übergang irgendwo und irgendwie zu finden war, wenn vielleicht auch nur in einer Richtung. Oder anders gesagt: Alt und jung können Werte für das Alter des Universums sein, rothaarig jedoch wohl eher weniger.

bereits Teile der Information erkennen:
- Wertveränderung
- Eigenschaft
- Wiederholbarkeit
- Zusammenhang

Da wir wissen, wie die gesamte Menge der Information aussieht, können wir nämlich auch Teile davon schon erkennen. Wieso? Weil wir jetzt wissen, was wir zu untersuchen haben: Zuerst interessieren uns nur Wertveränderungen, dann müssen wir deren „unveränderliches Zentrum“, die Eigenschaft, herausfinden und zuletzt noch feststellen, ob diese Wertveränderungen wiederholbar sind und zusammenhängen.

Messen
Vergleichen
Speichern

Das heißt, wir müssen messen – um an die Werte zu kommen -, vergleichen – um sie als unterschiedliche oder gleiche Werte zu bestimmen –, und speichern – um festzustellen, ob sie mehrfach gleich auftreten, also wiederholbar sein könnten und welche Kombinationen übereinstimmen. So können wir Zusammenhänge aufdecken zwischen den zeitlichen Veränderungen, aber auch in den zeitunabhängigen Mustern, die uns Eigenschaften und ihre Wertebereiche erkennen lassen.

Zusammenhänge zwischen zeitlichen Veränderungen und in zeitunabhängigen Mustern

Damit liefert uns unsere Mengendefinition die Verbindung auf der einen Seite zur klassischen Mathematik, auf der anderen Seite aber zu dem, auf was wir uns letztendlich nur verlassen können: auf Messen, Vergleichen und Speichern. Und gerade dies wird uns noch sehr hilfreich sein bei der Suche nach der „Idealform“ der Informationsverarbeitung.